ESSTIN
UNIVERSITE HENRI POINCARE

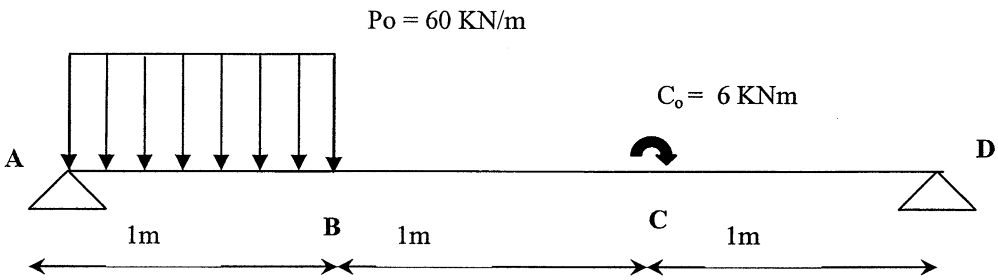
3^{ième} année
juin 2005
Durée : 2 heures

EXAMEN DE RESISTANCE DES MATERIAUX

Documents autorisés : cours et TD

Exercice 1 :

Soit le système ci – dessous :

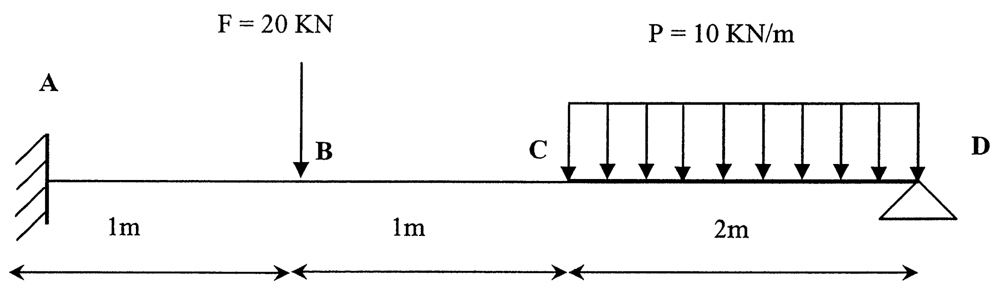


La poutre a une section rectangulaire de base **b = 60 mm** et de hauteur h = **150 mm**, le module d'Young **E** du matériau est égal à **210000 Mpa**

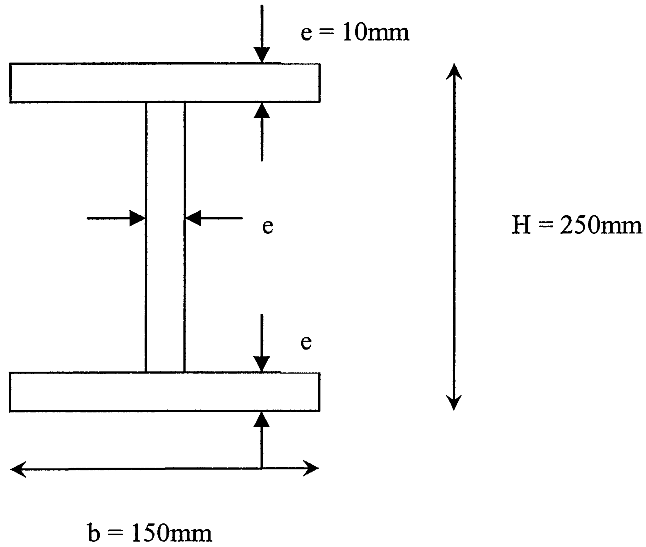
1 – Déterminer les efforts **N**, **T**, **M** et tracer leur diagramme.
2 – Déterminer les contraintes normales maximales d'extension et de compression dues au moment fléchissant et la contrainte tangentielle maximale due à l'effort tranchant.
3 – Donner l'expression de la déformée de la ligne moyenne pour chaque tronçon (pour éviter d'avoir des expressions trop longues, on remplacera, dans les expressions des moments, **Po** et **Co** par leur valeur).
4 – Exprimer les conditions d'appuis et les conditions de continuité. En déduire les constantes d'intégration de la question **3**.
5 – Calculer les rotations aux appuis.

Exercice 2.

On considère le système suivant :



La section de la poutre et ses dimensions sont données par le figure ci-dessous.



On donne : E = **210000Mpa**

Contrainte limite de traction ou de compression : **150 Mpa**

Contrainte limite de cisaillement : **75 MPa**

1 – Calculer les réactions d'appuis.

2 – Tracer les diagrammes N, T, M.

3 – La poutre résiste-t-elle ?

4 – Calculer le déplacement du point B.

Éthique des sciences ESSTIN 3° année
Sujet d'examen de juin (documents autorisés)

Laurent Rollet

Mentionnez bien sur votre copie le nom de l'enseignant avec lequel vous étiez en TD (C. Ququ ou L. Rollet).

Question 2 (5 points)

Définissez la notion de développement durable.

Question 3 (3 points)

La technique est souvent considérée comme ambivalente, à la fois comme transgression et comme libération. Qu'entend-on par cette idée ?

Question 4 (12 points)

Commentez l'une de ces citations au choix. Prenez appui sur les cours et essayez d'explorer les implications épistémologiques et éthiques des thèses défendues par les auteurs.

Ce qui est évalué : le style, l'articulation des arguments et la capacité à utiliser des éléments qui auraient pu être abordés en cours ou en TD. Vous avez le droit d'être d'accord ou en désaccord avec ces deux citations, l'essentiel étant d'ARGUMENTER. Evitez les prises de position caricaturales et sans nuances.

Citation 1

> Il est devenu indécent de critiquer les moteurs du « progrès », comme si cette critique devenait inaudible parce qu'il n'est pas d'autre perspective que celle de courir toujours plus vite que le voisin. Cette pauvreté de la réflexion sur le sens de la vie humaine, réduite à un projet animal dans un schéma darwinien, est renforcée par la convention tragique que les humains entretiennent avec le « progrès ». C'est ainsi que les « programmes » politiques sont surtout des promesses d'enrayer les malheurs en accélérant encore la machine qui les provoque. Et que tout candidat à une position responsable doit se montrer débarrassé des pesanteurs juvéniles qui résistent à la rigueur des « exigence du progrès ». [...]
>
> Notre époque exige le courage d'affronter le choix urgent entre un monde à deux vitesses où 80% des humains seront parqués dans une misère croissante, et celui d'une terre pour tous les hommes, où les mieux pourvus, dont nous sommes, doivent accepter de perdre une part de leur confort. [...]
>
> La science est la seule activité qui revendique la modification du monde physique et biologique. La responsabilité de ceux qui « font » la science, de ceux qui l'appliquent, et de ceux qui la vulgarisent, est donc considérable.

Jacques Testart, *Pour une éthique planétaire*, 1997.

Citation 2

Le nouveau serment d'Archimède

1. Je pratiquerai ma profession dans le respect d'une éthique des Droits de l'Homme et de la responsabilité du patrimoine naturel de l'Humanité.

2. J'assumerai, dans tous les actes de ma vie professionnelle, ma responsabilité vis-à-vis de mon institution, de la société et des générations futures.

3. Je veillerai à promouvoir le respect des rapports équitables entre tous les hommes et à soutenir le développement des pays économiquement défavorisés.

4. Je veillerai à expliquer mes choix et mes décisions dans la plus grande transparence possible à l'égard des décideurs et des citoyens.

5. Je serai attentif à favoriser, dans l'exercice de mes fonctions, les formes de management qui permettront une large coopération de tous les acteurs, afin de donner du sens au travail de chacun et à l'innovation.

6. Je m'engage à porter la plus grande attention à l'expression de l'esprit critique et au respect de la déontologie dans l'usage des moyens d'information et de communication.

7. Je serai attentif à compléter de manière continue mes compétences professionnelles dans tous les domaines des sciences technologiques, économiques, humaines et sociales requises par l'exercice de mes fonctions.

Manifeste pour la technologie au service de l'homme, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999

Citation 3

À bas la dictature de la sélection naturelle, vive la maîtrise humaine du vivant ! Car, à quoi bon se voiler la face ? Il est évident que l'homme, dans un avenir plus ou moins proche, aura le pouvoir de modifier son patrimoine génétique. Et l'appréhension que suscite l'évocation d'une telle échéance ne semble guère justifiée. [...] Je suis persuadé que l'homme futur, celui qui maîtrisera parfaitement les lois de la génétique, pourra être l'artisan de sa propre évolution biologique, et non celui de sa dégénérescence.

Docteur Cohen, responsable du Téléthon

Mécanique des fluides 3A

Juin 2005

Cours et TD autorisés.
Durée : 2 heures

Anne TANIERE

Etude d'une hélice propulsive.

On considère une hélice qui se déplace à la vitesse **v** dans un fluide incompressible et stationnaire. La pression ambiante à grande distance de l'hélice est $\mathbf{P_{at}}$ (figure 1). A l'infini amont la vitesse du fluide est $\mathbf{u'_1 = 0}$. A grande distance de l'hélice et en aval, le fluide possède une vitesse $\mathbf{u'_2}$ non nulle. Dans ce nouveau référentiel, la vitesse en amont et $\mathbf{u_1=v}$ et la vitesse en aval et à la distance de l'hélice est $\mathbf{u_2=v+ u'_2}$ (figure 2). Au voisinage de l'hélice et en amont (section u), la vitesse est $\mathbf{u_u=v+ u'_u}$ et au voisinage de l'hélice (section d) la vitesse est $\mathbf{u_d=v+ u'_d}$. Les sections transverses **u** et **d** du tube de courant étant très voisines peuvent être supposées égales, elles seront notées **A.** L'aire **A** représente également la surface balayée par l'hélice. Les pressions dans ces deux sections sont respectivement $\mathbf{p_u}$ et $\mathbf{p_d}$. On suppose que le fluide est parfait.

I. Expliquer la physique du phénomène observé sur la figure 3 (expliquer pourquoi les vitesses $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_u}$ ne sont pas les mêmes, de même pour $\mathbf{u_2}$ et $\mathbf{u_d}$).. Quel est le lien avec la figure 2 ?

II. En écrivant les bilans de masse, de quantité de mouvement entre les sections **u** et **d**, exprimer la force propulsive **T** communiquée au fluide en fonction de la différence de pression $\mathbf{p_d - p_u}$. Quelle est l'énergie gagnée par le fluide ?

III. Pourquoi l'hélice est considérée comme une surface avec une discontinuité de pression ? (pour y répondre, représenter la répartition de pression en suivant l'écoulement de l'infini amont à l'infini aval). A quel groupe de turbomachine appartient l'hélice (pompe ou turbine ?), expliquer.

IV. A l'aide du bilan de quantité de mouvement entre les sections amont 1 et aval 2, exprimer **T** en fonction de $\mathbf{u'_2}$ et du débit massique $\mathbf{q_m}$.

V. En appliquant Bernoulli entre les sections 1 et u, et entre d et 2 et à l'aide des expressions de **T**, démontrer que $\mathbf{u'_d = u'_2/2}$. Commenter ce résultat.

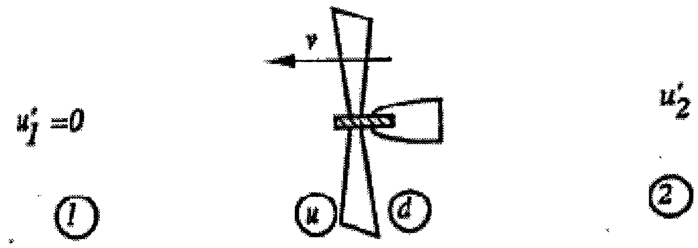


Figure 1. L'hélice avance à la vitesse v dans un fluide au repos.

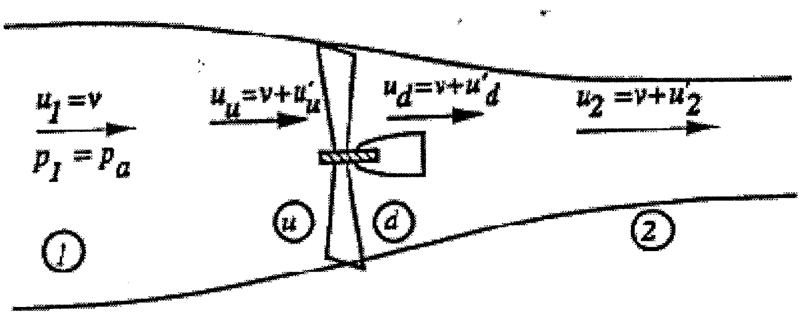


Figure 2. Représentation de l'écoulement dans un référentiel en mouvement avec l'hélice.

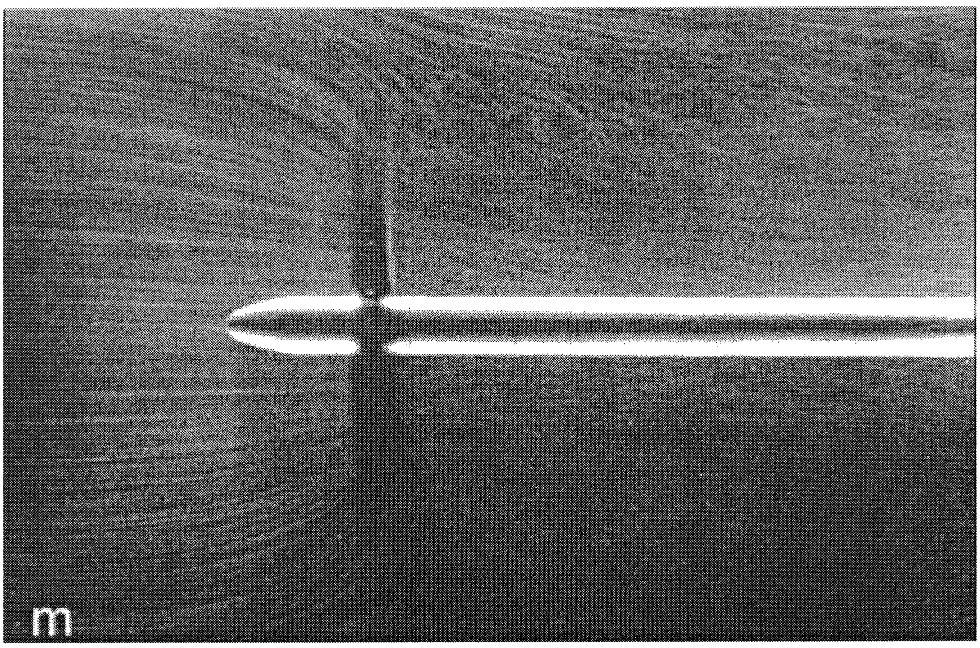


Figure 3 : Visualisation de la contraction des lignes de courant.

E.S.S.T.I.N.
UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY 1

SESSION DE JUIN 2005

3ème année
Durée : 2 heures

Documents autorisés : cours + TD

EXAMEN

BASES DE DONNEES

1. **Commenter le code suivant :**

```
if(($NbMatieres>0)&&($NbEleves>0))
{
 // ...
 $requete="SELECT * FROM RESULTAT WHERE ( matiere='$ListeMatieres[0]'";
}
// ...
for($i=1;$i<$NbMatieres;$i++)
  { $requete.=" OR matiere='$ListeMatieres[$i]'";
  }

// ...
$requete.=") AND ( eleve='$ListeEleves[0]'";

  // ...
for($i=1;$i<$NbEleves;$i++)
  { $requete.=" OR eleve='$ListeEleves[$i]'";
  }

// ...
$requete.=") ORDER BY `$tri` ASC;";

// ...
$resultat=mysql_query("$requete",$id);
```

2. **et celui-ci :**

```
create trigger InsertProd
on Produit
for insert
as if ( exists (select * from Produit p, inserted i where  p.prix > i.prix
and p.prod = i.prod) )
    begin
    print « très cher»
    rollback transaction
    end
```

Question 3 :

Une entreprise souhaite informatiser la gestion de son parc informatique (ordinateurs, imprimantes, etc.) pour en optimiser la maintenance. Pour cela, elle utilise une base de données dans laquelle les relations suivantes sont définies :

Ordinateur(<u>NumOrd</u>, ModeleOrd, DateAcqOrd, DateMainOrd)
Un ordinateur est caractérisé par son numéro de poste, son modèle, la date de son acquisition et la date de la prochaine maintenance planifiée.

Employe(<u>NomEmp</u>, PrenomEmp, FonctionEmp, NumOrd)
Un employé est caractérisé par son nom, son prénom et sa fonction dans l'entreprise. Un employé utilise un seul ordinateur.

Périphérique(<u>AdressePer</u>, TypePer, DateAcqPer,DatMain)
Chaque périphérique est caractérisé par une adresse réseau unique, son type (imprimantes ou scanner.), sa date d'acquisition et la date de la prochaine maintenance planifiée.

Relie(<u>NumOrd</u>, <u>AdressePer</u>, Priorité)
Les ordinateurs sont reliés à un certain nombre de périphériques en réseau. Les périphériques pouvant servir à plusieurs ordinateurs simultanément, un indice de priorité est affecté à chaque ordinateur pour chaque périphérique auquel il est connecté.

PLocalisé(NumBur, NumBat, <u>AdressePer</u>)
Chaque périphérique est localisé dans un bureau donné. Les bureaux sont caractérisés par un numéro de bureau et le numéro du bâtiment dans lequel ils se trouvent. Un numéro de bureau est unique dans un bâtiment donné.

OLocalisé(NumBur, NumBat, <u>NumOrd</u>)
Chaque ordinateur est localisé dans un bureau donné ..

Répondre aux questions suivantes en algèbre relationnelle <u>et</u> en SQL : (5 points)

- 2.1 Quels sont les ordinateurs achetés le 3/4/200 et qui sont localisés dans le bâtiment numéro 'xxxx' (afficher les numéros des ordinateurs et les numéros de bureaux) ?
- 2.2 Quels sont les ordinateurs reliés aux périphériques 'xxx' et 'yyy' ?
- 2.2 Quels sont les ordinateurs qui sont reliés à aucun périphérique ?

Répondre en SQL :

- 2.3 Quel est le nombre des ordinateurs dans le bâtiment numéro 6 ?
- 2.4 Quel est le nombre des ordinateurs par bureau ?
- 2.5 Quel est le nombre total des ordinateurs et des périphériques de cette entreprise ?
- 2.6. Quels sont les ordinateurs qui sont reliés à tous les périphériques (en utilisant la primitive EXISTS).
- 2.7 Créer les relations « Ordinateur », « Périphérique » et « Relie » en exprimant les contraintes de clé et d'intégrité référentielle.

E.S.S.T.I.N.	Session de Juin 2005
UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ - NANCY 1	
3ème année	Documents non autorisés
Durée : 2 heures	Calculatrice autorisée

EXAMEN

ANALYSE NUMÉRIQUE

Exercice 1 : (6 points)

1. Soit la matrice $L = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Montrer que L est la matrice d'interpolation pour la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ et le support $\{-1, 0, 1, 2\}$. (On se limitera à vérifier :

- les élèments d'une colonne, au choix, du produit $L.V = I$ où V est la matrice intervenant dans le problème d'interpolation,
- les élèments d'une autre colonne en calculant un polynôme de Lagrange).

2. Soit h un nombre réel positif, déterminer le polynôme d'interpolation d'une fonction f sur les points $\{-h, 0, h, 2h\}$.

3. Calculer une valeur approchée de $\int_0^h f(s)ds$.

4. En déduire une méthode de calcul de $\int_a^b f(u)du$ obtenue en interpolant f par arcs.

Exercice 2 : (8 points)

Soit un entier $n \geq 1$ et un support de $n+1$ points distincts $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Soit f une fonction dont les valeurs $y_i = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq n)$ sont connues, on note $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation passant par les points (x_i, y_i) pour $(0 \leq i \leq n)$.

1. a) Donner l'expression de $P_n(x)$ en fonction des polynômes de Lagrange $L_k(x) \quad (0 \leq k \leq n)$.

b) Expliquer pourquoi on peut en déduire : $\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$.

2. En écrivant $P_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{1}$, montrer que l'on obtient la forme "barycentrique" du polynôme d'interpolation :

$$P_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i.A_i}{x-x_i}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{x-x_i}} \quad \text{où } A_i = \frac{1}{\displaystyle\prod_{j=0 j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

3. a) Ecrire un algorithme modulaire détaillé de l'évaluation, pour la valeur $x = \alpha$, de $P_n(x)$ sous la forme "barycentrique".

b) En déduire le nombre d'opérations ($\pm$, $*$, $/$) nécessaires.

Exercice 3 : (6 points)

1. Construire les polynômes orthogonaux $G_0(x)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$ relativement au produit scalaire

$$(f, g) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x).g(x)dx$$

2. a) En déduire une formule de quadrature de Gauss :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)dx \simeq A_0.f(x_0) + A_1.f(x_1)$$

b) Si f est un polynôme, jusqu'à quel degré cette formule est-elle exacte ? Vérifier.

*

E.S.S.T.I.N. **Session de juin 2005**

UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY 1

3ème année

Durée : 2 heures

EXAMEN

Statistiques

Documents autorisés : Polycopiés de cours
Tables statistiques
Livre de Jean-Pierre LECOUTRE "Statistiques et Probabilités"

Calculatrice autorisée

Barème indicatif : *Exercice 1* *10 points*
Exercice 2 *10 points*

La notation tiendra compte de la rédaction.

EXERCICE 1

Les données suivantes (n = 84) représentent le nombre hebdomadaire de problèmes de systèmes pour un réseau informatique. Ces problèmes sont survenus suite à un changement de configuration du système.

Nombre hebdomadaire de problèmes de systèmes											
2	3	0	0	4	2	5	2	4	1	1	2
0	2	3	0	0	2	3	0	2	1	4	2
2	0	2	0	1	2	1	0	1	0	1	2
1	1	1	0	0	2	1	1	0	2	1	5
3	1	0	3	3	0	0	2	3	3	2	1
3	2	1	1	0	0	1	0	1	1	5	4
4	1	2	1	3	1	1	0	2	4	3	0

1. Préciser quels sont le caractère, l'individu, l'échantillon et la population.
2. Opérer une mise en ordre des résultats et faire deux représentations graphiques.
3. Calculer les principaux caractères descriptifs : moyenne, étendue, mode, variance, écart-type, médiane.
4. Proposer un modèle pour représenter le nombre hebdomadaire de problèmes de systèmes en précisant le (ou les) paramètre(s) de ce modèle. Justifier le choix du modèle et interpréter la (ou les) valeur(s) du (ou des) paramètre(s).
5. Est-ce que ce relevé permet de supporter l'hypothèse selon laquelle le nombre hebdomadaire de problèmes du système suit le modèle proposé à la question 4. ?
6. Quel est le seuil descriptif du test ? Donner sa signification.
7. Représenter graphiquement la loi théorique et discuter la qualité de l'ajustement. Conclure.

EXERCICE 2

L'entreprise PROSAC doit fournir une quantité importante de sacs à ordures (format géant de 72 cm x 1,22 m) à la ville de Nancy. L'entreprise est tenue par contrat avec la ville de se conformer à la norme ISO 9003. Cette norme spécifie qu'un contrôle final doit être appliqué au produit.

Selon le contrat d'achat entre PROSAC et la ville, il est mentionné ce qui suit concernant le plan de contrôle à mettre en œuvre :

Caractéristique à contrôler :	Résistance à la rupture
Sac conforme :	Chaque sac contrôlé sera classé "conforme" s'il résiste à l'impact d'une masse spécifique provenant d'une hauteur de 5 m
Lot à contrôler :	2500 sacs
Plan de contrôle :	Plan d'échantillonnage consistant à prélever 250 sacs du lot
Niveau de qualité acceptable :	2 %
Niveau d'acceptation des lots de qualité 2 % :	0,95
Décision concernant les lots non conformes :	Si un lot n'est pas acceptable selon les critères du plan d'échantillonnage, il sera détruit

1. Quelles sont les hypothèses statistiques que l'on veut vérifier avec ce plan de contrôle ?
2. Quelle est la valeur critique de la proportion de sacs non conformes qui ne doit pas être dépassée pour considérer un lot comme acceptable ?
3. Pour faciliter la mise en application du plan de contrôle, on aimerait plutôt utiliser, comme critère de décision, le nombre de sacs déclarés non conformes. Quel devrait être ce nombre ? Énoncer alors la règle de décision.
4. Lors d'un dernier contrôle sur un lot de sacs à expédier à la ville, on a obtenu 6 sacs déclarés non conformes. Est-ce que ce lot peut être considéré comme acceptable d'après les exigences de la ville ?
5. La ville a mandaté un laboratoire spécialisé dans les tests destructifs pour vérifier à l'occasion certaines fournitures achetées en quantité importante pour certaines caractéristiques qu'elle considère critiques. Le laboratoire utilise le même plan de contrôle que PROSAC.
   a) Quelles sont les chances sur 100 que le laboratoire accepte un lot comportant 6 % de sacs non conformes alors que PROSAC certifie 2 % de non conformes ?
   b) Comment appelle-t-on cette probabilité ?
   c) Calculer à nouveau cette probabilité pour les valeurs 3, 4, 5 et 7 % de sacs non conformes.
   d) Proposer une représentation graphique des probabilités calculées en a) et c) et discuter de son utilisation pour PROSAC et pour la ville de Nancy.

CALCULATRICES **NON** AUTORISÉES

EXAMEN DE PHYSIQUE STATISTIQUE

La paire de Frenkel

Dans un cristal parfait, les N atomes qui le constituent occupent les N sites d'un réseau. Une telle perfection ne peut exister qu'au zéro absolu. Un cristal réel contient toujours des défauts. On se propose ici d'étudier le défaut de Frenkel : un atome s'échappe de son site pour se fixer en insertion dans le cristal. La paire de Frenkel est constituée de cet atome et de la lacune qu'il a laissé derrière lui. Une fois la paire créée, aucune interaction ne subsiste entre la lacune et l'atome en insertion : chacun peut choisir de façon équiprobable n'importe quel site du réseau auquel il appartient. On appellera réseau principal le réseau entièrement occupé au zéro absolu et réseau secondaire le réseau de sites d'insertion.

1. Effet de la température (première méthode)

Dans ce paragraphe et dans le suivant, le volume n'intervient pas.

Si le défaut de Frenkel est seul présent dans le cristal, et si n est le nombre de paires de Frenkel, on trouvera $(N-n)$ atomes sur le réseau principal et n atomes sur le réseau secondaire. Mais pour mener à bien les calculs, il est nécessaire d'envisager dans un premier temps une situation plus quelconque.

Voici les hypothèses de travail :

1. Tous les atomes sont identiques ; il y en a N.
2. Tous les sites du réseau principal sont identiques ; il y en a M.
3. Tous les sites du réseau secondaire sont identiques ; il y en a M également.
4. Pas d'interactions lacune/lacune, lacune/interstitiel, interstitiel/interstitiel.
5. On choisit l'origine des énergies de sorte que l'énergie du cristal parfait soit nulle. Une lacune dans le réseau principal sera affectée d'une énergie ε_ℓ et un atome placé sur le réseau secondaire d'une énergie ε_i. Ces deux niveaux seront supposés non dégénérés et seuls accessibles.

***Question* 1 :** *Exprimer en fonction de M, $\lambda = e^{-\gamma}$, $q_\ell = e^{-\beta\varepsilon_\ell}$ et $q_i = e^{-\beta\varepsilon_i}$ la fonction de partition grand canonique $Z(\beta,\gamma)$ du système. En déduire par dérivation les expressions de N et de E.*

On pose maintenant $M = N$.

***Question* 2 :** *Calculer λ à partir de l'expression de N et remplacer dans E. En identifiant E à $n\,\varepsilon$, exprimer le nombre n de défauts en fonction de N et $\varepsilon = \varepsilon_\ell + \varepsilon_i$. Et enfin calculer la capacité thermique C_V à volume constant.*

ATTENTION, CE DOCUMENT EST UN RECTO-VERSO

2. Effet de la température (deuxième méthode)

Cette méthode utilisant l'ensemble canonique ne nécessite pas l'introduction de la variable intermédiaire M. On écrit la fonction de partition canonique de la manière suivante :

$$Q(\beta, N) = \sum_{n=0}^{N} Q_\ell(N, \beta, n) \times Q_i(N, \beta, n)$$

$Q_\ell(N, \beta, n)$ est la fonction de partition canonique des n lacunes réparties sur les N sites du réseau principal, et $Q_i(N, \beta, n)$ est la fonction de partition canonique des n atomes répartis sur les N sites du réseau secondaire.

***Question* 3** : *Écrire $Q(\beta, N)$ et constater que la somme est incalculable.*

Mais nous ne sommes pas coincés pour autant. Il reste encore la méthode du terme maximum consistant à ne retenir dans la somme que le terme le plus probable :

$$Q(\beta, N) \approx Q_\ell(N, \beta, n^*) \times Q_i(N, \beta, n^*)$$

***Question* 4** : *Calculer la valeur n^* la plus probable et constater que cette valeur est identique à celle trouvée à la question* 2. *Si ce n'est pas fait, calculer la capacité thermique C_V à volume constant.*

3. Effet de la pression

L'effet de la pression sur le cristal parfait ne nous intéresse pas. Nous travaillerons donc avec le volume excédentaire dû à la présence des défauts. On notera v_ℓ le volume excédentaire lié à la présence d'une lacune dans le réseau principal, v_i le volume excédentaire lié à la présence d'un atome sur le réseau secondaire, et on posera $V = n\,v$, avec $v = v_\ell + v_i$.

***Question* 5** : *En vous inspirant du modèle décrit au paragraphe* 1, *exprimer en fonction de M, λ, q_ℓ, q_i, $\eta_\ell = e^{-\xi v_\ell}$ et $\eta_i = e^{-\xi v_i}$ la fonction de partition totale $I(\beta, \xi, \gamma)$ du système. En déduire par dérivation les expressions de N, de V et de E. Poser $M = N$, calculer λ et remplacer dans les expressions de V et E. En déduire la capacité thermique C_p à pression constante, le coefficient de dilatation thermique à pression constante et le module de compressibilité à température constante.*

Vous pouvez également utiliser un modèle inspiré de celui décrit au paragraphe 2. C'est maintenant l'ensemble T-p qu'il faut utiliser :

$$Z(\beta, \xi, N) = \sum_{n=0}^{N} Z_\ell(N, \beta, \xi, n) \times Z_i(N, \beta, \xi, n) \approx Z_\ell(N, \beta, \xi, n^*) \times Z_i(N, \beta, \xi, n^*)$$

***Question* 6** : *Calculer la valeur n^* la plus probable et constater qu'elle est identique à celle trouvée à la question* 5. *Si ce n'est pas fait, calculer la capacité thermique C_p à pression constante, le coefficient de dilatation thermique à pression constante et le module de compressibilité à température constante.*

CALCULATRICES NON AUTORISÉES

EXAMEN DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Particule dans un double champ de force

Le problème est le suivant : une masse ponctuelle est soumise à deux champs de force, l'un à symétrie cylindrique, l'autre à symétrie sphérique. Comment pallier à cette difficulté ? Une seule solution : les coordonnées paraboloïdales et la méthode de Hamilton-Jacobi.

1. Les coordonnées paraboloïdales

Les coordonnées paraboloïdales, notées (u, v, φ), sont définies de la façon suivante :

$$x = u\,v\cos\varphi \qquad y = u\,v\sin\varphi \qquad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

$$u = \sqrt{r+z} \quad v = \sqrt{r-z} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2} = u\,v \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \tfrac{1}{2}(u^2+v^2)$$

On considère un objet ponctuel P de masse m soumis à deux champs de force :

- un champ de force parallèle à Oz : $\vec{F}_z = -F_z(z)\,\vec{e}_z$ (avec $\vec{e}_z$ unitaire porté par Oz)
- un champ de force central : $\vec{F}_r = -F_r(r)\,\vec{e}_r$ (avec $\vec{e}_r$ unitaire porté par $\overrightarrow{OP}$)

***Question* 1 :** *Calculer les vecteurs de la base naturelle, les composantes du tenseur métrique et l'énergie cinétique d'un objet ponctuel de masse m dans ce système de coordonnées. Montrer que l'énergie potentielle s'écrit $V(u,v) = V_z(z) + V_r(r)$, avec :*

$$V_z(z) = \int F_z(z)\,\mathrm{d}z \quad \textit{exprimé en fonction de} \quad z = \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

$$\textit{et} \quad V_r(r) = \int F_r(r)\,\mathrm{d}r \quad \textit{exprimé en fonction de} \quad r = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

2. Transformation de Hamilton-Jacobi

Soit $\vec{F}_z = -m\,G\,\vec{e}_z$ et $\vec{F}_r = -m\,g\,\dfrac{r_0^2}{r^2}\,\vec{e}_r$ et donc $V(u,v) = m\,G\,\dfrac{u^2-v^2}{2} - \dfrac{2\,m\,g\,r_0^2}{u^2+v^2}$

Soit aussi $S(t,u,v,\varphi,b_1,b_2,b_3) = -b_1\,t + b_2\,\varphi + S_u(u,b_1,b_2,b_3) + S_v(v,b_1,b_2,b_3)$.

***Question* 2 :** *Calculer le hamiltonien $H(p_u,p_v,p_\varphi,u,v,\varphi)$ et écrire l'équation de Hamilton-Jacobi. Mettre l'équation sous la forme $S_u'^2 + \Psi_u(u) + S_v'^2 + \Psi_v(v) = 4m^2gr_0^2$, avec $S_u' = \frac{\partial S_u}{\partial u}$ et $S_v' = \frac{\partial S_v}{\partial v}$* (on en déduit qu'il existe une constante b_3 telle que $S_u'^2 + \Psi_u(u) = 2m^2gr_0^2 + b_3$ et $S_v'^2 + \Psi_v(v) = 2m^2gr_0^2 - b_3$). *En déduire les expressions de S_u et S_v et trois équations intégrales, la première exprimant le temps t en fonction de u, v et d'une constante a^1, la deuxième exprimant l'angle φ en fonction de u, v et d'une constante a^2, et la troisième liant entre eux u, v et une constante a^3.*

Il reste à introduire les conditions initiales. On choisira $t_0 = 0$, $z_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{r}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$, r_0 et $\dot{\varphi}_0$ donnés.

***Question* 3** : *Exprimer b_1, b_2, b_3 en fonction des conditions initiales et les introduire dans les résultats. Choisir correctement les bornes des intégrales de façon à annuler les constantes a^1, a^2, a^3.*

3. Si la méthode de Hamilton-Jacobi ne vous inspire pas ...

... et aussi pour montrer que cette méthode est la seule à conduire à une solution.

***Question* 4** : *En partant du tenseur métrique calculé à la question* 1*, calculer les symboles de Christoffel et écrire les trois équations des géodésiques. Ces équations doivent bien entendu mener à des équations de droites. Montrez-le.*

Voici quelques éléments pour vous aider :

1. Montrer que $\ddot{z} = 0$;
2. L'équation en $\ddot{\varphi}$ est intégrable une fois : on peut exprimer $\dot{\varphi}$ en fonction de ρ ;
3. On remplace dans les deux autres équations, et on en déduit une équation du type $\ddot{\rho} = f(\rho)$ que l'on intègre deux fois ;
4. Le $\rho(t)$ obtenu permet de calculer $\varphi(t)$ puis $x(t) = \rho(t)\cos\varphi(t)$ et $y(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)$.

***Question* 5** : *En partant du lagrangien calculé à la question* 1*, écrire les trois équations de Lagrange. On constatera que la troisième est une intégrale première. Exprimer $\ddot{u}$ et $\ddot{v}$ uniquement en fonction de u et v. Sur le modèle de la question ci-dessus, exprimer $\ddot{z}$ et $\ddot{\rho}$ en fonction de z et r* (conseil : calculer au préalable $\ddot{z}$, $\dot{z}^2$, $\ddot{\rho}$, $\dot{\rho}^2$ en fonction de u, v, $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\ddot{u}$, $\ddot{v}$)*. Exprimer la conservation de l'énergie en une relation ne faisant apparaître que les variables z, $\dot{z}$, ρ, $\dot{\rho}$.*

Le formalisme de Lagrange s'arrête à ces quatre équations, qu'on aurait pu d'ailleurs obtenir à l'aide des coordonnées cylindriques.

***Question* 6** : *Si vous avez réussi à calculer le hamiltonien, constatez que les équations canoniques sont encore moins exploitables que les équations de Lagrange.*